Ad-soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Ara Sınav Soruları **07.05.2023**

NOT : Sorularda belirtilen yöntemlerden başka yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Süre 75 dakikadır. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız (20 p).

(D) 2x3 tipindeki bir matris ile 3x4 tipindeki matris çarpılırsa 2x4 tipinde bir matris bulunur.

(Y) Herhangi iki matrisi toplayabiliriz.

(D) Her lineer dönüşüme bir matris karşılık gelir.

(D) Her lineer denklem sistemi elementer işlemler yardımıyla çözülebilir.

(D) 3 elemanlı bir kümenin 6 tane permütasyonu vardır.

2) $A=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A matrisinin satırca indirgenmiş eşelon biçimini bulunuz (15 p).

b) A matrisinin tersi var mıdır? Neden? (5 p).

3) $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ permütasyonu veriliyor.

a) $\sigma^{-1}=?$ (10 p).

b) σ yı transpozisyonların çarpımı olarak yazınız (10 p).

4) $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü $L(x,y)=(x+3y, 2x+5y, 7x+9y)$ şeklinde tanımlanıyor.

a) L lineer dönüşümüne standart bazlara göre karşılık gelen matrisi yazınız (4 p).

b) $L(\mathbb{R}^2)=?$ (4 p).

c) çekL=? (4 p).

d) L 1-1 midir? (4 p).

e) L örten midir? (4 p).

5) V ve W, F cismi üzerinde vektör uzayları, $L:V\to W$ bir lineer dönüşüm olsun. L 1-1 ve $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}\subset V$ lineer bağımsız ise $\{L(\alpha_1),L(\alpha_2),\dots,L(\alpha_n)\}\subset W$ lineer bağımsızdır, gösteriniz (20 p) .

2)

a) $A=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 6\\ -2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow[5S_3+S_2]{6S_3+S_1} \begin{bmatrix}-3 & 3 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow[-S_3]{-\frac{1}{3}S_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{2S_1+S_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+S_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I_3$

b) $A \approx I_3 \Rightarrow A$ nın tersi vardır.

3) a) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$

b) $\sigma = (1,3,6,5)(2,4,7) = (1,5)(1,6)(1,3)(2,7)(2,4)$

4) a) $\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$, $\{\beta_1=(1,0,0), \beta_2=(0,1,0), \beta_3=(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ standart bazlar

$L(e_1) = (1,2,7) = 1\cdot\beta_1 + 2\cdot\beta_2 + 7\cdot\beta_3$

$L(e_2) = (3,5,9) = 3\cdot\beta_1 + 5\cdot\beta_2 + 9\cdot\beta_3$

$\Rightarrow L$ ye karşılık gelen matris $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 3 & 5 & 9\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ dır.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $L(x,y) = (x+3y, 2x+5y, 7x+9y)$

$= (x, 2x, 7x) + (3y, 5y, 9y)$

$= x(1,2,7) + y(3,5,9)$

$\Rightarrow L(\mathbb{R}^2) = sp\{(1,2,7),(3,5,9)\}$

c) $\text{çek}L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : L(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\forall (x,y) \in \text{çek}L$ alalım.

$L(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x+3y, 2x+5y, 7x+9y) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0\\ 2x+5y=0\\ 7x+9y=0 \end{cases}$

Sistemin katsayılar matrisi $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ dır.

$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix} \xrightarrow[-7S_1+S_3]{-2S_1+S_2} \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\\ 0 & -12\end{bmatrix} \xrightarrow[-12S_2+S_3]{3S_2+S_1} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{-S_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \end{array}$

O halde, lineer denklem sisteminin çözümü $(x,y) = (0,0)$ dır

$\Rightarrow$ çek $L = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

d) çek $L = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow L$ 1-1 dir.

e) $\text{boy}\,\mathbb{R}^2 = \text{boy}\,L(\mathbb{R}^2) + \text{boy}\,\text{çek}\,A$

$2 = \text{boy}\,L(\mathbb{R}^2) + 0 \Rightarrow \text{boy}\,L(\mathbb{R}^2) = 2$

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ olup $\text{boy}\,L(\mathbb{R}^2) = 2 \neq 3 = \text{boy}\,\mathbb{R}^3$ olduğundan L örten değildir.

5) $L: V \to W$ lineer dönüşümü 1-1 ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset V$ lineer bağımsız olsun. $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \ldots, L(\alpha_n)\} \subset W$ nın lineer bağımsız olduğunu göstereceğiz. $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ olmak üzere

$$c_1 L(\alpha_1) + c_2 L(\alpha_2) + \cdots + c_n L(\alpha_n) = 0_W$$

olduğunu kabul edelim. L lineer olduğundan

$$L(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n) = 0_W$$

yazılabilir. L lineer olup $L(0_V) = 0_W$ dır.

$$L(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n) = 0_W,\ L(0_V) = 0_W \text{ ve } L \text{ 1-1 olduğundan}$$

$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = 0_V$ olmalıdır. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset V$ lineer bağımsız olup $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak; $L: V \to W$ lineer dönüşümü 1-1 ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset V$ lineer bağımsız ise $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \ldots, L(\alpha_n)\} \subset W$ da lineer bağımsızdır.